УДК 539.3

С.Б. АКПЕРОВА

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ МОДУЛЯМИ СДВИГА

На основе метода однородных решений изучена задача кручения трансверсально-изотропного полого цилиндра малой толщины с переменными модулями сдвига. Получены асимптотические разложения однородных решений и проанализировано напряженно-деформированное состояние цилиндра.

Ключевые слова: *радиально-неоднородный цилиндр, пограничный слой, краевой эффект Сен-Венана.*

Введение. Важное место в теории пластин и оболочек занимают исследования неоднородных тонкостенных конструкций. Сложность явлений, возникающих при деформации неоднородных оболочек, привели к созданию различных прикладных теорий, каждая из которых построена на основе определенной системы гипотез. Несмотря на существование целого ряда технических теорий неоднородных оболочек, области их применимости изучены мало. Сам факт существования различных прикладных теорий для неоднородных конструкций ставит задачу их критического анализа на основе позиций трехмерных уравнений теории упругости.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу кручения для радиально-неоднородного трансверсально-изотропного полого цилиндра малой толщины. Отнесем цилиндр к цилиндрической системе координат r, φ, z:

$$r_1 \le r \le r_2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -L \le z \le L.$$

Уравнение равновесия в перемещениях при отсутствии массовых сил имеет вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[G(\rho)\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}\right)\right]+\frac{2G(\rho)}{\rho}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}\right)+G_1(\rho)\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\xi^2}=0. \quad (1)$$

Здесь $\rho = r/r_0$, $\xi = z/r_0$ — новые безразмерные переменные, $r_0 = (r_1 + r_2)/2$ — радиус срединной поверхности цилиндра, $\rho \in [\rho_1; \rho_2]$ $(\rho_s = r_s/r_0,\ s = 1,2)$, $\xi \in [-l; l]$ $(l = L/r_0)$; $u_\varphi = u_\varphi(\rho, \xi)$ — компонента вектора смещения; $G = G(\rho)$, $G_1 = G_1(\rho)$ — безразмерные упругие характеристики (модули сдвига), рассматриваемые как произвольные положительные кусочно-непрерывные функции переменной ρ.

Предполагаем, что боковая часть цилиндра свободна от напряжений, т. е.

$$\sigma_{\rho\varphi} = G(\rho)\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}\right)\Bigg|_{\rho=\rho_s} = 0,\ (s = 1, 2), \quad (2)$$

а на торцах цилиндра заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{\varphi\xi} = G_1(\rho)\frac{\partial u_\varphi}{\partial\xi}\Bigg|_{\xi=\pm l} = f^{\pm}(\rho), \quad (3)$$

где $f^{\pm}(\rho)$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям равновесия.

Решение (1) будем искать в виде:

$$u_\varphi(\rho,\xi) = \upsilon(\rho)m(\xi), \quad (4)$$

где функция $m(\xi)$ подчинена условию

$$m''(\xi) - \mu^2 m(\xi) = 0. \quad (5)$$

После подстановки выражения (4) в уравнения (1) и (2) с учетом условия (5) получим:

$$\begin{cases} \left[G(\rho)\left(\upsilon'(\rho)-\dfrac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)\right]' + \dfrac{2G(\rho)}{\rho}\left(\upsilon'(\rho)-\dfrac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)+\mu^2 G_1(\rho)\upsilon(\rho)=0, & (6)\\ G(\rho)\left(\upsilon'(\rho)-\dfrac{\upsilon(\rho)}{\rho}\right)\Bigg|_{\rho=\rho_s}=0. & (7)\end{cases}$$

Рассмотрим несколько частных случаев зависимости упругих характеристик от ρ.

Квадратичная зависимость. Допустим у цилиндра модули сдвига заданы в виде функций

$$G(\rho)=g_0\rho^2;\quad G_1(\rho)=g_1\rho^2, \tag{8}$$

где g_0, g_1 — постоянные.

С учетом зависимостей (8) из уравнений (6) и (7) имеем:

$$\begin{cases} \upsilon''(\rho)+\dfrac{3}{\rho}\upsilon'(\rho)+\left(\dfrac{g_1}{g_0}\mu^2-\dfrac{3}{\rho^2}\right)\upsilon(\rho)=0, & (9)\\ \left(\rho^2\upsilon'(\rho)-\rho\upsilon(\rho)\right)\Big|_{\rho=\rho_s}=0. & (10)\end{cases}$$

Уравнения (9) и (10) можно представить в следующем виде:

$$A\upsilon=\mu^2\upsilon, \tag{11}$$

где

$$A\upsilon=\left\{-\frac{g_0}{g_1}\left(\frac{d^2\upsilon}{d\rho^2}+\frac{3}{\rho}\frac{d\upsilon}{d\rho}-\frac{3}{\rho^2}\upsilon\right);\ \left(\rho^2\frac{d\upsilon}{d\rho}-\rho\upsilon\right)\Bigg|_{\rho=\rho_s}=0\right\}.$$

A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(\rho_1;\rho_2)$ с весом ρ^3. Все собственные значения $\lambda_k(A)$ — вещественные, а соответствующие им собственные функции — ортонормированные:

$$(\upsilon_k,\upsilon_n)=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\upsilon_k(\rho)\,\bar{\upsilon}_n(\rho)\rho^3 d\rho=\delta_{kn}. \tag{12}$$

Общее решение (9) имеет вид:

$$\upsilon(\rho)=\rho^{-1}\left(AJ_2(\beta\rho)+BY_2(\beta\rho)\right), \tag{13}$$

где $\beta=\sqrt{\dfrac{g_1}{g_0}}\mu$; $J_2(\beta\rho)$, $Y_2(\beta\rho)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно; A, B — произвольные постоянные.

С помощью уравнения (13), удовлетворяя граничным условиям (10), относительно A и B получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений. Из условия существования нетривиальных решений этой системы имеем характеристическое уравнение:

$$\Delta(\beta,\rho_1,\rho_2)=\left(\beta^2\rho_1\rho_2+\frac{64}{\beta^2\rho_1\rho_2}-\frac{8\left(\rho_1^2+\rho_2^2\right)}{\rho_1\rho_2}\right)L_{11}(\beta)+$$
$$+\left(4\beta\rho_1-\frac{32}{\beta\rho_1}\right)L_{10}(\beta)+\left(4\beta\rho_2-\frac{32}{\beta\rho_2}\right)L_{01}(\beta)+16L_{00}(\beta)=0, \tag{14}$$

где

$$L_{ij}(\beta)=J_i(\beta\rho_1)Y_j(\beta\rho_2)-J_j(\beta\rho_2)Y_i(\beta\rho_1),\ (i,j=0,1).$$

Левая часть трансцендентного уравнения (14), как целая функция параметра μ, имеет счетное множество нулей с точкой сгущения на бесконечности.

Проанализируем характеристическое уравнение (14). Положим

$$\rho_1 = 1 - \varepsilon; \quad \rho_2 = 1 + \varepsilon, \tag{15}$$

где $\varepsilon = \dfrac{r_2 - r_1}{2r_0}$ — малый параметр, характеризующий толщину цилиндра.

Подставляя выражения (15) в уравнение (14), получаем

$$\Delta_1(\mu, \rho_1, \rho_2) = D(\mu, \varepsilon) = 0. \tag{16}$$

Функция $D(\mu, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ имеет две группы нулей со следующими асимптотическими свойствами:

а) первая группа состоит из двукратного нуля $\mu = 0$;

б) вторая группа состоит из счетного множества нулей, которые имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$.

Приведем схему доказательства этих свойств. Представим $D(\mu, \varepsilon)$ в следующем виде:

$$D(\mu, \varepsilon) = \frac{4\varepsilon\mu^2 g_1}{\pi g_0}\left\{1 + \left(\frac{16}{3} - \frac{2g_1}{3g_0}\mu^2\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{2g_1^2}{15g_0^2}\mu^4 - \frac{2g_1}{g_0}\mu^2 + \frac{32}{3}\right)\varepsilon^4 + \ldots\right\}. \tag{17}$$

Отметим, что

$$D(\mu, \varepsilon) = \mu^2 D_0(\mu, \varepsilon)$$

и $\lim\limits_{\mu \to 0} D_0(\mu, \varepsilon) = C \quad (0 < C < \infty)$.

То есть $\mu = 0$ является двукратным нулем $D(\mu, \varepsilon)$.

Покажем, что все нули $D_0(\mu, \varepsilon)$ неограниченно возрастают при $\varepsilon \to 0$. Предполагаем обратное. Допустим $\mu_k \to \mu_k^* \neq \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда справедливо предельное соотношение $D_0(\mu_k, \varepsilon) = \varepsilon D_*(\mu_k^*)$ при $\varepsilon \to 0$. Предельные точки множества нулей μ_k при $\varepsilon \to 0$ определяются из уравнения $D_*(\mu_k^*) = 0$. В рассматриваемом случае $D_*(\mu_k^*) = \dfrac{4g_1}{\pi g_0}$. Следовательно, предположение о существовании ограниченных при $\varepsilon \to 0$ нулей несправедливо.

Определим характер стремления μ_k к ∞ при $\varepsilon \to 0$. При $\varepsilon \to 0$ возможны следующие случаи: 1) $\varepsilon\mu_k \to 0$; 2) $\varepsilon\mu_k \to \text{const}$; 3) $\varepsilon\mu_k \to \infty$. Аналогично методу [2] можно показать, что случаи 1 и 3 здесь невозможны.

Для построения асимптотики нулей второй группы отыскиваем их в виде:

$$\mu_k = \frac{\delta_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon). \tag{18}$$

После подстановки выражения (18) в характеристическое уравнение (14) и преобразования его с помощью асимптотических разложений функций $J_\nu(\beta\rho)$, $Y_\nu(\beta\rho)$ $(\nu = 0, 1)$ для δ_k получим:

$$\sin\left(2\sqrt{\frac{g_1}{g_0}}\delta_k\right) = 0, \quad \delta_k = \frac{\pi k}{2\sqrt{g_1/g_0}}. \tag{19}$$

Из уравнений (19) видно, что в отличие от изотропной оболочки при фиксированных значениях k и при больших значениях $\sqrt{g_1/g_0}$ (сильная анизотропия) показатель изменяемости

напряженного состояния δ_k стремится к нулю. В этом случае некоторые погранслойные решения не обладают свойством затухания и могут охватывать всю область, занятую оболочкой.

Приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих группам нулей, которые рассмотрены выше.

Перемещение и напряжения, соответствующие корню $\mu^2 = 0$, определяются следующими формулами:

$$u_\varphi^{(1)}(\rho,\xi) = A_0\rho\xi, \quad \sigma_{\rho\varphi}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{\varphi\xi} = g_1 A_0 \rho^3. \tag{20}$$

Полагая $\rho = 1 + \varepsilon\eta \ \left(-1 \le \eta \le 1\right)$ и раскладывая по малому параметру ε решения второй группы, находим для них следующие асимптотические выражения:

$$u_\varphi^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sqrt{\frac{g_1}{g_0}}\delta_k \cos\left(\sqrt{\frac{g_1}{g_0}}\delta_k\left(1-\eta\right)\right) + O(\varepsilon)\right] m_k(\xi),$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(2)} = \frac{g_1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\delta_k^2 \sin\left(\sqrt{\frac{g_1}{g_0}}\delta_k\left(1-\eta\right)\right) + O(\varepsilon)\right] m_k(\xi), \tag{21}$$

$$\sigma_{\varphi\xi}^{(2)} = g_1\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sqrt{\frac{g_1}{g_0}}\delta_k \cos\left(\sqrt{\frac{g_1}{g_0}}\delta_k\left(1-\eta\right)\right) + O(\varepsilon)\right] m_k'(\xi),$$

где $m_k(\xi) = F_k e^{\mu_k \xi} + E_k e^{-\mu_k \xi}$.

Укажем характер построенных решений. Перемещение представим в виде:

$$u_\varphi(\rho,\xi) = A_0\rho\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \upsilon_k(\rho)\, m_k(\xi). \tag{22}$$

Во второе слагаемое включены перемещения, определяемые вторыми группами решений.

На основе уравнения (22) для напряжений получим:

$$\sigma_{\varphi\xi} = g_1 A_0\rho^3 + g_1\sum_{k=1}^{\infty}\rho^2\upsilon_k(\rho)\, m_k'(\xi), \tag{23}$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = g_0\sum_{k=1}^{\infty}\left(\rho^2\upsilon_k'(\rho) - \rho\upsilon_k(\rho)\right) m_k(\xi). \tag{24}$$

Для крутящих моментов $M_{\text{êð}}$ напряжений, действующих в сечении $\xi = \mathrm{const},$ имеем:

$$M_{\text{êð}} = 2\pi\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sigma_{\varphi\xi}\rho^2 d\rho. \tag{25}$$

Подставим уравнение (23) в выражение (25):

$$M_{\text{êð}} = \frac{\pi g_1\left(\rho_2^6 - \rho_1^6\right)}{3}A_0 + 2\pi g_1\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^4\upsilon_k(\rho)\,d\rho\right) m_k'(\xi). \tag{26}$$

Умножим обе части уравнения (9) на ρ^4 и проинтегрируем полученное выражение в пределах $[\rho_1;\rho_2]$:

$$\frac{g_1}{g_0}\mu^2\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^4\upsilon_k(\rho)\,d\rho = 3\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^2\upsilon_k(\rho)\,d\rho - \int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^4\upsilon_k''(\rho)\,d\rho - 3\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^3\upsilon_k'(\rho)\,d\rho. \tag{27}$$

С помощью интегрирования по частям и с использованием граничного условия (10) из выражения (27) получим:

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^4\upsilon_k(\rho)\,d\rho = 0. \tag{28}$$

Подставим зависимость (28) в уравнение (26):

$$M_{êð} = \frac{\pi g_1 \left(\rho_2^6 - \rho_1^6\right)}{3} A_0. \tag{29}$$

Формулы (20) определяют внутреннее напряженно-деформированное состояние цилиндра. Напряженное состояние, соответствующее второй группе решений, имеет характер пограничного слоя и первые члены его асимптотического разложения эквивалентны краевому эффекту Сен-Венана в теории трансверсально-изотропных плит [2].

Рассмотрим вопрос о снятии напряжений с торцов цилиндра. Как было показано, несамоуравновешенную часть напряжений можно снять при помощи проникающего решения (20), причем связь постоянной A_0 с крутящим моментом определяется равенством (29).

Подставим уравнение (23) в граничные условия (3)

$$g_1 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^2 \upsilon_k(\rho) m_k'(\xi) \Big|_{\xi=\pm l} = f_1^{\pm}(\rho), \tag{30}$$

где

$$f_1^{\pm}(\rho) = f^{\pm}(\rho) - \frac{3M_{êð}}{\pi\left(\rho_2^6 - \rho_1^6\right)}\rho^3.$$

Умножая выражение (30) на $\rho\overline{\upsilon}_n(\rho)$ и интегрируя в пределах $[\rho_1;\rho_2]$, с учетом уравнения (12) получаем:

$$m_n'(\xi)\Big|_{\xi=\pm l} = t_n^{\pm},$$

т. е.

$$\left(\mu_n e^{\mu_n \xi} F_n - \mu_n e^{-\mu_n \xi} E_n\right)\Big|_{\xi=\pm l} = t_n^{\pm}. \tag{31}$$

Здесь $t_n^{\pm} = \dfrac{1}{g_1} \displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho_2} f_1^{\pm}(\rho)\overline{\upsilon}_n(\rho)\rho d\rho.$

После решения уравнения (31) определим неизвестные постоянные F_n и E_n:

$$F_n = \frac{t_n^+ e^{\mu_n l} - t_n^- e^{-\mu_n l}}{2\mu_n \operatorname{sh}(2\mu_n l)}, \qquad E_n = \frac{t_n^+ e^{-\mu_n l} - t_n^- e^{\mu_n l}}{2\mu_n \operatorname{sh}(2\mu_n l)}.$$

Линейная зависимость. Допустим модули сдвига заданы в виде:

$$G(\rho) = g_0\rho; \quad G_1 = g_1\rho, \tag{32}$$

где g_0, g_1 — постоянные.

С учетом зависимости (32) из уравнений (6) и (7) имеем:

$$\begin{cases} \upsilon''(\rho) + \dfrac{2}{\rho}\upsilon'(\rho) + \left(\dfrac{g_1}{g_0}\mu^2 - \dfrac{2}{\rho^2}\right)\upsilon(\rho) = 0, & (33) \\ \left(\rho\upsilon'(\rho) - \upsilon(\rho)\right)\Big|_{\rho=\rho_s} = 0. & (34) \end{cases}$$

Общее решение (33) имеет вид:

$$\upsilon(\rho) = \rho^{-1/2}\left(C_1 J_{3/2}(\beta\rho) + C_2 Y_{3/2}(\beta\rho)\right), \tag{35}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

С помощью выражения (35), удовлетворяя граничным условиям (34), получаем характеристическое уравнение:

$$\Delta_2(\mu,\rho_1,\rho_2)=\sqrt{\frac{g_1}{g_0}}\left(\frac{\mu}{\rho_1\rho_2}+\frac{9\rho_1\rho_2-3\rho_1^2-3\rho_2^2}{\rho_1^3\rho_2^3}\frac{g_0}{g_1}\mu^{-1}+\frac{9g_0^2}{g_1^2\rho_1^3\rho_2^3}\mu^{-3}\right)\times$$
$$\times\sin\left(\mu\sqrt{\frac{g_1}{g_0}}(\rho_2-\rho_1)\right)-\left[\frac{3(\rho_2-\rho_1)}{\rho_1^2\rho_2^2}+\frac{9g_0(\rho_2-\rho_1)}{g_1\rho_1^3\rho_2^3}\mu^{-2}\right]\times$$
$$\times\cos\left(\mu\sqrt{\frac{g_1}{g_0}}(\rho_2-\rho_1)\right)=0. \qquad (36)$$

Трансцендентное уравнение (36) имеет счетное множество корней μ_k.

Подставляем выражение (15) в характеристическое уравнение (36):

$$\Delta_2(\mu,\rho_1,\rho_2)=Q(\mu,\varepsilon)=0. \qquad (37)$$

Уравнение (37) имеет две группы корней: а) первая группа состоит из двукратного корня $\mu=0$, который не зависит от ε; б) вторая — из счетного множества корней $\mu_k=\dfrac{\delta_k}{\varepsilon}+O(\varepsilon)$, которые при $\varepsilon\to 0$ стремятся к бесконечности.

Перемещение и напряжения, соответствующие корню $\mu^2=0,$ имеют вид:

$$u_\varphi^{(1)}(\rho,\xi)=B_0\rho\xi,\quad \sigma_{\rho\varphi}^{(1)}=0,\quad \sigma_{\varphi\xi}=g_1B_0\rho^2. \qquad (38)$$

Формулы (38) определяют внутреннее напряженно-деформированное состояние цилиндра. Постоянная B_0 пропорциональна крутящему моменту $M_{\hat{e}\eth}$ напряжений, действующих в сечении $\xi=\text{const}$ таким образом:

$$M_{\hat{e}\eth}=\frac{2\pi g_1\left(\rho_2^5-\rho_1^5\right)}{5}B_0.$$

Перемещение и напряжения, соответствующие второй группе корней, по своей структуре имеют вид (21) и соответствующее напряженное состояние имеет характер пограничного слоя.

Выводы. Решения (20) и (38), соответствующие корню $\mu^2=0,$ определяют внутреннее напряженно-деформированное состояние цилиндра. Напряженное состояние, соответствующее второй группе корней, с порядком $O\left(\varepsilon^{-1}\right)$ имеет характер пограничного слоя. В этом случае некоторые погранслойные решения не обладают свойством затухания и могут охватить всю область, занятую цилиндром.

Библиографический список

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. — М. : Наука, 1977. — 415 с.

2. Мехтиев М.Ф. Метод однородных решений в анизотропной теории оболочек. — Баку : Чашыоглу, 2009. — 334 с.

References

1. Lehnickii S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. — M. : Nauka, 1977. — 415 s. — in Russian.

2. Mehtiev M.F. Metod odnorodnyh reshenii v anizotropnoi teorii obolochek. — Baku : Chashyoglu, 2009. — 334 s. — in Russian.

Материал поступил в редакцию 14.04.10.

S.B. AKPEROVA

ANALYSIS OF THE TORSION PROBLEM ON TRANSVERSALLY ISOTROPIC LIGHT GAUGE CYLINDER WITH VARIABLE SHEAR MODULUS

A torsion problem on the transversally isotropic hollow light gauge cylinder with variable shear modules is studied on the ground of the homogeneous solution method. Asymptotic expansions of homogeneous solutions are obtained, and cylinder stress-strain state is analyzed.
Key words: *radially nonuniform cylinder, boundary layer, Saint-Venant edge effect.*

АКПЕРОВА Севда Бакир кызы, старший преподаватель кафедры «Математика, информатика и методики их преподавания» Азербайджанского института учителей. Окончила Бакинский государственный университет (1989).

Область научных интересов — асимптотическая теория оболочек.

Автор 6 научных публикаций.

seriye@yandex.ru

Sevda B. Akperova, Senior Lecturer of the Mathematics, Informatics and the Teaching Methodology Department, Azerbaijan Institute of Teachers. She graduated from Baku State University (1989).

Research interests — asymptotic theory of shells.

Author of 6 scientific publications.

seriye@yandex.ru